

§ 12. 9.1 Monotonie, ^{ne globální} lokální extrémny funkce

Než se začnete do této podkapitoly, připomeňte si definici 3.12 rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající funkce na množině M . Ujasněte si také rozdíl mezi monotonii a ryzí monotonii.

V kapitole 3 jsme si ukázali pár jednoduchých příkladů na určování intervalů ryzí monotonie dané funkce. Využívali jsme k tomu znalost definice. Postup ověřování monotonie pouze na základě definice však může být velmi pracný. Nyní si ukážeme efektivnější způsob, kdy o monotonii dané funkce na určitém intervalu rozhodneme na základě znalosti znaménka první derivace funkce na tomto intervalu.

V.12.1. Věta 9.1. Nechť funkce f má na intervalu (a, b) , $a, b \in \mathbb{R}^*$, derivaci.

Je-li

- i) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f rostoucí na (a, b) .
- ii) $f'(x) \geq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f neklesající na (a, b) .
- iii) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f klesající na (a, b) .
- iv) $f'(x) \leq 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f nerostoucí na (a, b) .
- v) $f'(x) = 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f konstantní na (a, b) .

Důkaz. Uvedeme důkaz prvního tvrzení. Předpokládejme, že platí $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Zvolme libovolná čísla $x_1, x_2 \in (a, b)$ taková, že $x_1 < x_2$. Vzhledem k definici rostoucí funkce 3.12 potřebujeme dokázat, že $f(x_1) < f(x_2)$.

Uvažujme nyní interval $\langle x_1, x_2 \rangle$. Pak podle Lagrangeovy věty 8.7 existuje číslo $\xi \in (x_1, x_2)$ takové, že

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Číslo ξ konkrétně neznáme, ale vzhledem k předpokladu víme, že $f'(\xi) > 0$. Protože je jmenovatel předchozího zlomku $x_2 - x_1$ kladný a celý zlomek je také kladný, musí být kladný i číselník. Tedy $f(x_2) - f(x_1) > 0$, tj. $f(x_1) < f(x_2)$. Důkazy dalších tvrzení věty se provedou analogicky. $\square$



Příklad 9.2. Užitím předchozí věty dokažte, že funkce f, g, h jsou rostoucí na svých definičních oborech:

a) $f: y = e^x$,

b) $g: y = \operatorname{arctg} x$,

c) $h: y = \ln x$.

Řešení.

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x$. Platí, že $e^x > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce f je tedy rostoucí na $D(f)$.

b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Platí, že $\frac{1}{x^2+1} > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, tj. $g'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Funkce g je tedy rostoucí na $D(g)$.

c) $D(h) = (0, \infty)$, $h'(x) = \frac{1}{x}$. Pro každé $x \in (0, \infty)$ platí, že $\frac{1}{x} > 0$, tj. $h'(x) > 0$. Funkce h je tedy rostoucí na $D(h)$. $\blacktriangle$

Příklad 9.3. Určete maximální intervaly monotonie funkce $f: y = \frac{1}{x}$.



Řešení. Monotonii zadané funkce jsme již jednou vyšetřovali v kapitole 3 v příkladě 3.13. Využili jsme definici rostoucí a klesající funkce. Pokusme se nyní vyšetřit monotonii funkce f na základě věty 9.1.

Definiční obor $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. První derivace $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Vidíme, že $f'(x) < 0$ pro každé $x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Derivace je na celém $D(f)$ záporná, přesto funkce f není klesající na $D(f)$ (např. pro body $-1, 1$ platí $-1 < 1$, avšak $f(-1) < f(1)$, což je ve sporu s definicí klesající funkce). Důvodem je skutečnost, že $D(f)$ není interval. Funkce f je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, \infty)$, ale není klesající na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ (srovnej s příkladem 3.13). ▲

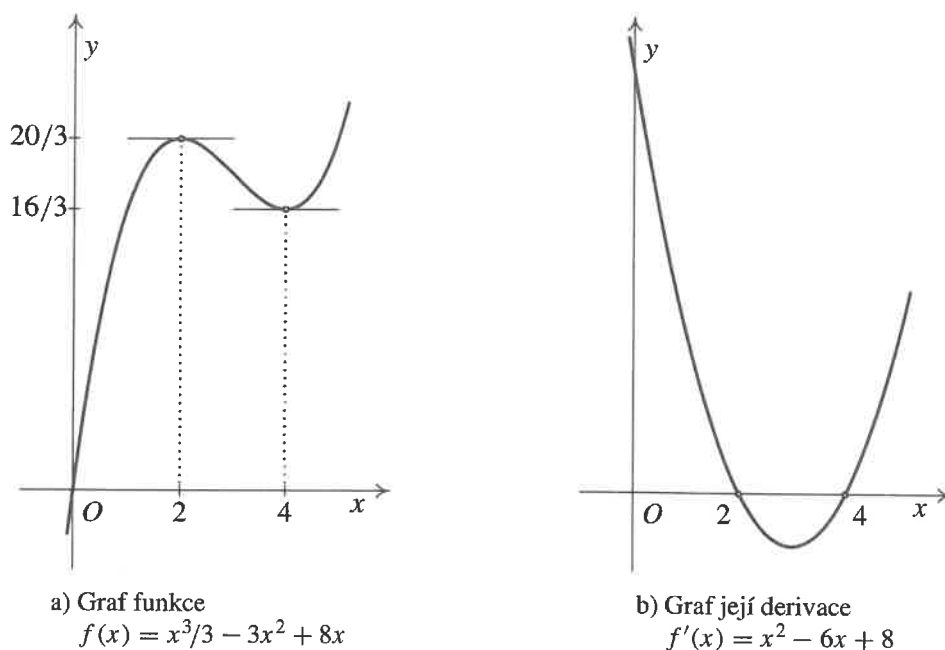
Poznámka 9.4.

1. Jak jsme viděli v příkladě 9.3, ve větě 9.1 je podstatné, že funkce se uvažuje na intervalu.
2. Uvědomte si, že tvrzení ve větě 9.1 jsou implikace. Platí: Je-li $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$, pak je f rostoucí na (a, b) . **Opačná implikace však neplatí.** Není pravda, že je-li f rostoucí na (a, b) , pak je $f'(x) > 0$ pro každé $x \in (a, b)$. Neplatnost opačné implikace ilustruje např. funkce $f(x) = x^3$ (je rostoucí na $\mathbb{R}$, ale v bodě $x = 0$ je derivace nulová, nikoliv kladná).
3. Vztah mezi monotonii dané funkce a znaménkem derivace si nejlépe uvědomíte, když si nakreslíte grafy jednoduchých funkcí a jejich derivací (např. $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \ln x, \dots$) My si jako příklad uveďme funkci trochu složitější — viz obr. 9.1. Vidíme, že derivace je na intervalu $(-\infty, 2)$ kladná (nad osou) a funkce je na tomto intervalu rostoucí, derivace je na intervalu $(2, 4)$ záporná (leží pod osou x) a funkce je na tomto intervalu klesající atd.
4. **Maximálními intervaly monotonie** rozumíme intervaly, které nejsou podmnožinou nějakého „většího“ intervalu, na kterém by byla daná funkce ještě monotónní. Monotonie funkce je definována (viz 3.12) pro libovolné intervaly (uzavřené, polouzavřené, otevřené), kdežto ve větě 9.1 se mluví pouze o otevřených intervalech. **Při hledání maximálních intervalů monotonie si tedy budeme všimnout i krajních bodů příslušných intervalů.** Jestliže bude daná funkce v krajním bodě intervalu spojitá, pak lze tento bod zahrnout do příslušného intervalu monotonie. Snadno se totiž ověří, že platí: Je-li f spojitá na $\langle a, b \rangle$ a rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na (a, b) , je f rostoucí (klesající, neklesající, nerostoucí) na $\langle a, b \rangle$. Analogické tvrzení platí i pro polouzavřené intervaly.

Při určování intervalů monotonie funkce f užitím věty 9.1 je třeba umět najít intervaly, na nichž je funkce f' kladná, resp. záporná. Jednou z možností, jak k tomuto úkolu přistupovat, je vyřešit příslušnou nerovnici. Tuto možnost jsme si ukázali na předchozích jednoduchých příkladech, kde bylo vyřešení příslušné nerovnice celkem snadné. Obecně ovšem tento postup bývá často zdlouhavý. **Výhodnější bývá použití Cauchyovy-Bolzanovy věty 8.1.** V předchozí kapitole jsme se pomocí této věty naučili určovat intervaly, na

(sh. 225)

(sh. 226)



Obr. 9.1: Vztah mezi funkcí a její derivací

nichž je funkce f kladná, resp. záporná. Nyní budeme postupovat obdobně, jen budeme pracovat s funkcí f' (první derivace funkce f) a hledat intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.



Příklad 9.5. Určete maximální intervaly ryzí monotonie funkce $f: y = x^2 e^x$.

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor funkce f . Jelikož exponenciální funkce i polynom jsou definovány na celé množině reálných čísel, je $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme derivaci funkce f a určíme její definiční obor:

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = e^x \cdot (2x + x^2), \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme nulové body derivace, tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (2x + x^2) = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2, \quad x_2 = 0.$$

b) Definiční obor $D(f')$ derivace rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -2), \quad (-2, 0), \quad (0, \infty).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko funkce f' na tomto intervalu. Např. v intervalu $(-\infty, -2)$ zvolíme bod -3 , v intervalu $(-2, 0)$ bod -1

a v intervalu $(0, \infty)$ bod 1.

$$(-\infty, -2) : f'(-3) = \frac{3}{e^3} > 0,$$

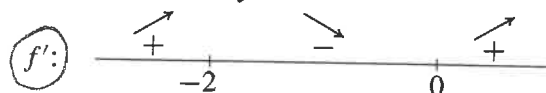
$$(-2, 0) : f'(-1) = -\frac{1}{e} < 0,$$

$$(0, \infty) : f'(1) = 3e > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je funkce f' (která je spojitá) kladná na intervalech $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$ a záporná na intervalu $(-2, 0)$.

4. Intervaly monotonie. Podle věty 9.1 je funkce f rostoucí na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(0, \infty)$ a klesající na intervalu $(-2, 0)$.

Znaménka derivace a monotonii funkce f na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu nebo zapsat do tabulky:



Znaménko $+$ nad intervalem $(-\infty, -2)$ značí, že na tomto intervalu je derivace kladná a šipka $\nearrow$ značí, že je funkce f na tomto intervalu rostoucí. Obdobně minus značí zápornou derivaci a $\searrow$ klesající funkci f .

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
f'	+	-	+
f	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je rostoucí na intervalu $(-\infty, -2)$ a na intervalu $(0, \infty)$ a klesající na intervalu $(-2, 0)$ (využili jsme toho, že funkce je v bodech -2 a 0 spojitá). ▲

Vzhledem k tomu, že určování intervalů monotonie úzce souvisí s určováním lokálních extrémů, další řešené příklady budou zařazeny za oddíl Lokální extrémy.

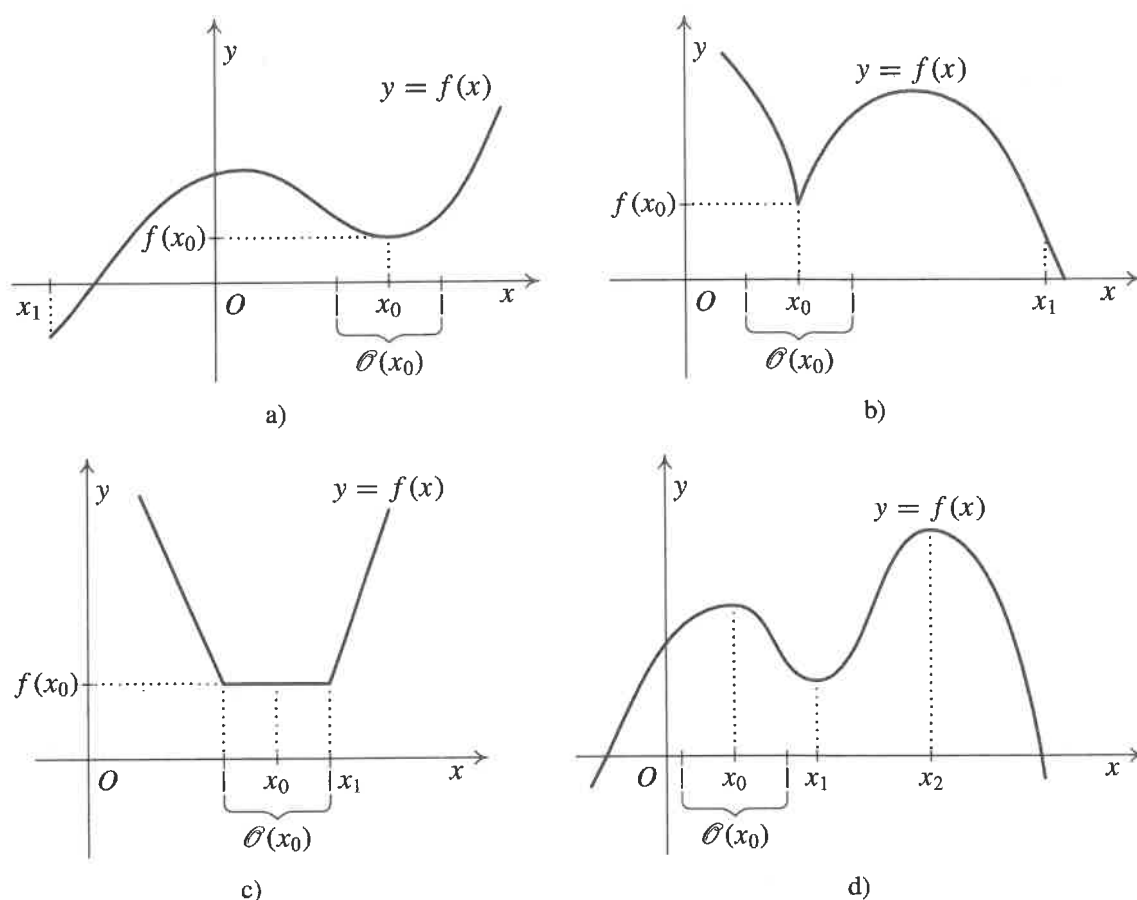
9.2 Lokální extrémy

Definice 9.6. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{O}(x_0)$ je $f(x) \geq f(x_0)$, resp. $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 ostré lokální minimum, resp. ostré lokální maximum, jestliže existuje prstencové okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 takové, že pro všechna $x \in \mathcal{P}(x_0)$ je $f(x) > f(x_0)$, resp. $f(x) < f(x_0)$.

Má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, resp. lokální maximum, říkáme, že f má v bodě x_0 lokální extrém.





Obr. 9.2

Tedy má-li funkce f v bodě x_0 lokální minimum, znamená to, že v určitém okolí bodu x_0 není menší hodnota než $f(x_0)$. V některém vzdálenějším bodě tomu již tak být nemusí. Např. na obr. 9.2 a) a 9.2 b) je $f(x_1) < f(x_0)$, avšak bod x_1 vždy leží mimo dostatečně malé okolí $\mathcal{O}(x_0)$. Podobně má-li funkce f v bodě x_0 lokální maximum znamená to, že v jistém okolí bodu x_0 není větší hodnota než $f(x_0)$.

Obrázek 9.2 d) ukazuje, že funkce může mít více lokálních extrémů — kromě lokálního maxima v bodě x_0 má ještě lokální minimum v bodě x_1 a lokální maximum v bodě x_2 . Dalším příkladem může být funkce $f: y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, která má dokonce nekonečně mnoho bodů lokálního maxima („vrcholů“) a nekonečně mnoho bodů lokálního minima („dolůků“).

Na obrázcích 9.2 a), 9.2 b), 9.2 d) jsou v bodě x_0 ostré lokální extrémy. Naproti tomu na obr. 9.2 c) je v bodě x_0 lokální minimum, které není ostré (v dostatečně malém okolí jsou všechny hodnoty stejné, protože funkce je zde konstantní). V tomto bodě je dokonce současně i lokální maximum (ve vyznačeném okolí $\mathcal{O}(x_0)$ totiž platí $f(x) = f(x_0)$). V bodě x_1 téhož obrázku je lokální minimum, které není ostré (vlevo od x_1 jsou vždy stejné funkční hodnoty). Lokální maximum to již pochopitelně není. Samozřejmě, že

každé ostré lokální maximum je zároveň i lokálním maximem a ostré lokální minimum i lokálním minimem. Opak ovšem neplatí.

Naším úkolem bude najít body, v nichž má zadaná funkce lokální extrémy. Uvědomme si, že z definice 9.6 vyplývá, že pokud je definičním oborem uvažované funkce interval, nemůže jít o krajní body tohoto intervalu. Důvodem je skutečnost, že funkce není definována na celém okolí krajních bodů tohoto intervalu. Postup hledání lokálních extrémů se většinou skládá ze dvou kroků:

1. Vytipujeme „podezřelé“ body (tj. body, v nichž by mohl být lokální extrém; v jiných bodech extrém být nemůže).
2. Rozhodneme, ve kterém „podezřelém“ bodě je extrém a ve kterém není extrém.

Zamysleme se nad tím, které body mohou být „podezřelé“. Podle věty 9.1 víme, že má-li funkce f na celém intervalu (a, b) nenulovou derivaci, pak je na intervalu (a, b) rostoucí nebo klesající a v žádném bodě takového intervalu nemůže být extrém. Pokud tedy derivace existuje, přicházejí v úvahu pouze body, v nichž je $f'(x) = 0$. Tyto body hrají dále klíčovou roli, proto pro ně zavádíme speciální název.

Definice 9.7. Bod $x_0 \in D(f)$, ve kterém platí, že $f'(x_0) = 0$, se nazývá **stacionární bod**.

Příklad 9.8. Najděte stacionární body funkcí a) $f: y = x^2$, b) $g: y = x^3$.

Řešení.

a) $D(f) = \mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$, $D(f') = \mathbb{R}$. Stacionární body:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tedy jediným stacionárním bodem je bod $x_0 = 0$ — viz obr. 9.3 a).

b) $D(g) = \mathbb{R}$, $g'(x) = 3x^2$, $D(g') = \mathbb{R}$. Stacionární body:

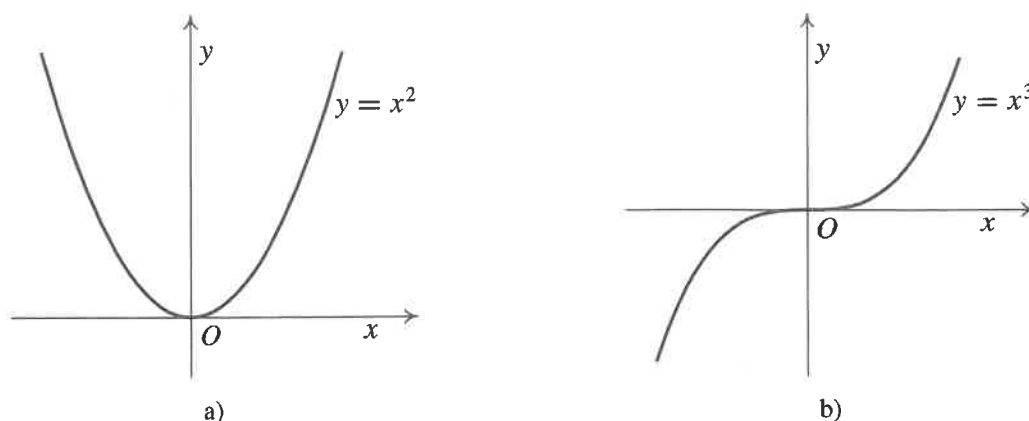
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Tedy jediným stacionárním bodem je bod $x_0 = 0$ — viz obr. 9.3 b).

Nyní již víme, že mezi „podezřelé body“ patří body stacionární (tedy body, v nichž první derivace existuje a je nulová). To je případ funkcí znázorněných na obr. 9.2 a) a 9.2 d). Podíváme-li se na obr. 9.2 b), vidíme, že v bodě x_0 , v němž nastává lokální extrém, derivace neexistuje (graf nemá v bodě x_0 tečnu). Tedy dalšími „podezřelými body“ jsou body, v nichž první derivace neexistuje. Celkově dostáváme následující větu:

Věta 9.9. Nechť funkce f má v bodě x_0 lokální extrém. Pak buď platí $f'(x_0) = 0$, anebo $f'(x_0)$ neexistuje.





Obr. 9.3

Poznámka 9.10. Věta 9.9 udává tzv. *nutnou podmínku* existence lokálního extrému. Říká, že pokud má funkce v bodě lokální extrém, pak nemůže nastat jiná situace než že se derivace v tomto bodě buď rovná nule, anebo vůbec neexistuje. Tedy pokud v daném bodě derivace existuje a nerovná se nule, nemůže zde být lokální extrém. Tato věta ovšem nedává návod, za jakých podmínek lze lokální extrém najít. Tyto podmínky budou obsaženy ve dvou následujících větách, tzv. *postačujících podmínkách* existence lokálního extrému.

V příkladě 9.8 jsme našli stacionární body funkcí f a g . Z grafů těchto funkcí (viz obr. 9.3) vidíme, že funkce f má v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém (minimum) a funkce g v bodě $x_0 = 0$ nemá lokální extrém. Funkce f v levém okolí nuly klesá a v pravém okolí nuly roste, funkce g v levém i pravém okolí nuly roste. K tomu, aby nastal extrém, tedy zřejmě stačí, aby se funkce při přechodu přes daný bod změnila „z rostoucí na klesající“ nebo naopak. Přesný výsledek (tj. jak rozhodneme o „podezřelých bodech“) je obsažen v následující větě.

V.12.3. Věta 9.11. Nechť funkce f je spojitá v bodě x_0 a má derivaci v nějakém prstencovém okolí $\mathcal{P}(x_0)$ bodu x_0 . Je-li

- i) $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \mathcal{P}^-(x_0)$ a $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.
- ii) $f'(x) > 0$ pro každé $x \in \mathcal{P}^-(x_0)$ a $f'(x) < 0$ pro každé $x \in \mathcal{P}^+(x_0)$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.

Předpoklad spojitosti v bodě x_0 je zejména splněn, je-li v x_0 stacionární bod.

Stručně řečeno:

Mění-li f' znaménko při přechodu přes x_0 , je v bodě x_0 lokální extrém.

Nemění-li f' znaménko při přechodu přes x_0 , není v bodě x_0 lokální extrém.

Je-li změna $-+$, jde o minimum (klesá-roste, tj. $\searrow \nearrow$).

Je-li změna $+-$, jde o maximum (roste-klesá, tj. $\nearrow \searrow$).

Shrňme si naše dosavadní poznatky do jakéhosi návodu, jak postupovat při hledání lokálních extrémů a maximálních intervalů ryzí monotonie funkce f :

1. Určíme $D(f)$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$.
3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná (předpokládáme přitom, že $D(f')$ lze vyjádřit jako sjednocení disjunktních intervalů J_i a že f' je spojitá na každém z těchto intervalů):
 - a) Určíme nulové body f' , tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.
 - b) Každý interval J_i rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly.
 - c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' v tomto bodě.
4. Určíme intervaly monotonie funkce f (s využitím věty 9.1) a lokální extrémy (v bodě $x_0 \in D(f)$, kde se mění charakter funkce „z rostoucí na klesající“, nastává ostré lokální maximum a v bodě, kde se mění charakter funkce „z klesající na rostoucí“, nastává ostré lokální minimum).

Poznamenejme, že intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná můžeme určit i jinak, než je uvedeno v bodě 3), a to vyřešením nerovnic $f'(x) > 0$ a $f'(x) < 0$.

Příklad 9.12. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60.$$



Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.
2. Vypočteme f' a $D(f')$:

$$f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná:

a) Nulové body f' :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^4 - 60x^3 - 120x^2 = 0.$$

Jedná se o algebraickou rovnici čtvrtého stupně, která má čtyři kořeny (obecně komplexní, počítáno s násobností). Ovšem při řešení těchto příkladů hledáme pouze reálná řešení, neboť chceme najít stacionární body, tedy body z definičního oboru funkce f' (a ten je pro každou funkci podmnožinou $\mathbb{R}$).

Rovnici upravíme na tvar:

$$60x^2(x^2 - x - 2) = 0 \Leftrightarrow 60x^2 = 0 \text{ nebo } x^2 - x - 2 = 0.$$

Vyřešením rovnice $60x^2 = 0$ dostaneme dvojnásobný kořen $x_{1,2} = 0$ a vyřešením rovnice $x^2 - x - 2 = 0$ obdržíme další dva kořeny

$$x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2, \\ -1. \end{cases}$$

Všechny kořeny jsou reálné. Stacionární body tudíž jsou $x_{1,2} = 0$, $x_3 = 2$ a $x_4 = -1$.

b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

$$(-\infty, -1), \quad (-1, 0), \quad (0, 2), \quad (2, \infty).$$

c) V každém z „dílčích“ intervalů zvolíme jeden bod a v něm určíme znaménko funkce f' . Body zvolíme např. takto: $-2, -\frac{1}{2}, 1, 3$. Pak

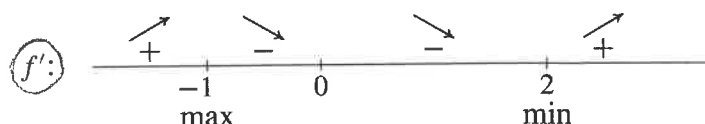
$$f'(-2) = 960 > 0, \quad f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{75}{4} < 0, \quad f'(1) = -120 < 0, \quad f'(3) = 2160 > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je f' na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ záporná a na intervalech $(-\infty, -1)$ a $(2, \infty)$ kladná.

4. Interval monotonie a lokální extrém.

Dle věty 9.1 je funkce f na intervalu $(-\infty, -1)$ rostoucí, na intervalech $(-1, 0)$ a $(0, 2)$ klesající a na intervalu $(2, \infty)$ opět rostoucí. Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. V bodě $x_{1,2} = 0$ lokální extrém nemá. Vypočteme funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů. Vyjde $f(-1) = 73, f(2) = -116$.

Znaménka derivace a monotonii na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



nebo zapsat do tabulky:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, \infty)$
f'	+	0	-	0	-	0	+
f	↗	lok. max.	↘		↘	lok. min.	↗

5. Závěr: Funkce f je rostoucí na intervalech $(-\infty, -1)$, $(2, \infty)$ a klesající na intervalu $(-1, 2)$ (vzhledem ke spojitosti v bodě 0 jsme intervaly mohli sjednotit). Funkce f má tedy v bodě $x_4 = -1$ ostré lokální maximum a v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum. ▲



Příklad 9.13. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f: y = xe^{-x^2}.$$

Řešení.

1. $D(f) = \mathbb{R}$.

2. Vypočteme f' a $D(f')$:

$$f'(x) = (x)'e^{-x^2} + x(e^{-x^2})' = 1e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2}, \quad D(f') = \mathbb{R}.$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme nulové body f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow e^{-x^2} - 2x^2 e^{-x^2} = 0 \Leftrightarrow e^{-x^2}(1 - 2x^2) = 0 \quad (*) \\ &\Leftrightarrow 1 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

(*): Výraz e^{-x^2} je vždy kladný, můžeme tedy celou rovnici tímto výrazem vydělit.

b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly

$$(-\infty, -1/\sqrt{2}), \quad (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad (1/\sqrt{2}, \infty).$$

c) V každém intervalu zvolíme jeden bod, v němž určíme znaménko funkce f' :

$$f'(-1) = -\frac{1}{e} < 0, \quad f'(0) = 1 > 0, \quad f'(1) = -\frac{1}{e} < 0.$$

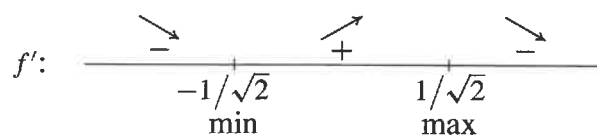
Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je f' kladná na $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ a záporná na $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ a na $(1/\sqrt{2}, \infty)$.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.

Funkce je na $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ klesající, na $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ rostoucí a na $(1/\sqrt{2}, \infty)$ opět klesající. Podle věty 9.11 má tedy funkce f v bodě $x_1 = -1/\sqrt{2}$ ostré lokální minimum (změna charakteru funkce z klesající na rostoucí) a v bodě $x_2 = 1/\sqrt{2}$ ostré lokální maximum (změna charakteru funkce z rostoucí na klesající). Vypočteme ještě funkční hodnoty v bodech lokálních extrémů:

$$f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-(\pm \frac{1}{\sqrt{2}})^2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}e}.$$

Znaménka derivace a monotonií na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



nebo zapsat do tabulky:

	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$-1/\sqrt{2}$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$1/\sqrt{2}$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
f'	—	0	+	0	—
f	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘

5. Závěr: Funkce je klesající na intervalech $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ a $(1/\sqrt{2}, \infty)$ a rostoucí na intervalu $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$. V bodě $x_1 = -1/\sqrt{2}$ je ostré lokální minimum a v bodě $x_2 = 1/\sqrt{2}$ ostré lokální maximum.





Příklad 9.14. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f: y = \frac{x^2}{\ln x}.$$

Řešení.

1. Nejprve určíme definiční obor funkce f . Jelikož logaritmická funkce je definována pouze na intervalu $(0, \infty)$, musí být $x > 0$. Dále musí být jmenovatel zlomku nenulový, tj. $\ln x \neq 0$, tudíž $x \neq 1$. Celkem je proto $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$.
2. Vypočteme derivaci funkce f a její definiční obor:

$$f'(x) = \frac{2x \cdot \ln x - x^2 \cdot \frac{1}{x}}{\ln^2 x} = \frac{2x \ln x - x}{\ln^2 x} = \frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{\ln^2 x}, \quad D(f') = D(f).$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme nulové body f' :

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{x \cdot (2 \ln x - 1)}{\ln^2 x} = 0 \Leftrightarrow x \cdot (2 \ln x - 1) = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \\ &\stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} 2 \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

($\star$): Protože je $x \neq 0$, můžeme jím celou rovnici vydělit.

Dostali jsme jeden nulový bod $x_0 = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

- b) Každý z intervalů tvořících $D(f')$ rozdělíme nulovými body na disjunktní intervaly

$$(0, 1), \quad (1, \sqrt{e}), \quad (\sqrt{e}, \infty).$$

- c) V každém z těchto intervalů zvolíme jeden bod a určíme znaménko f' ve zvolených bodech. Např. v intervalu $(0, 1)$ zvolíme bod $\frac{1}{e}$, v intervalu $(1, \sqrt{e})$ zvolíme bod $\sqrt[4]{e}$ a v intervalu $(\sqrt{e}, \infty)$ bod e .

$$(0, 1) : f'\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\frac{1}{e}(2 \ln \frac{1}{e} - 1)}{(\ln \frac{1}{e})^2} = \frac{\frac{1}{e}(-2 - 1)}{(-1)^2} = -\frac{3}{e} < 0,$$

$$\begin{aligned} (1, \sqrt{e}) : f'(\sqrt[4]{e}) &= \frac{e^{\frac{1}{4}}(2 \ln e^{\frac{1}{4}} - 1)}{(\ln e^{\frac{1}{4}})^2} = \frac{e^{\frac{1}{4}}(2 \cdot \frac{1}{4} - 1)}{(\frac{1}{4})^2} = \\ &= \frac{-\frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{16}} = -8e^{\frac{1}{4}} < 0, \end{aligned}$$

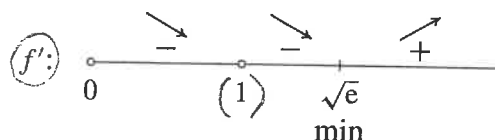
$$(\sqrt{e}, \infty) : f'(e) = \frac{e(2 \ln e - 1)}{(\ln e)^2} = \frac{e(2 - 1)}{1^2} = e > 0.$$

Tedy dle Cauchyovy-Bolzanovy věty je první derivace na intervalu $(0, 1)$ záporná, na intervalu $(1, \sqrt{e})$ rovněž záporná a na intervalu $(\sqrt{e}, \infty)$ kladná.

4. Interval monotonie a lokální extrémy.

Dle věty 9.1 je funkce f na intervalu $(0, 1)$ klesající, na intervalu $(1, \sqrt{e})$ také klesající a na intervalu $(\sqrt{e}, \infty)$ rostoucí. V bodě $\sqrt{e}$ nastává lokální minimum.

Znaménka derivace a monotonií na příslušných intervalech můžeme zakreslit nad číselnou osu



nebo zapsat do tabulky:

	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e}, \infty)$
f'	$-$	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$

5. Závěr: Funkce f je klesající na intervalech $(0, 1)$ a $(1, \sqrt{e})$ a rostoucí na $(\sqrt{e}, \infty)$. V bodě $\sqrt{e}$ nastává ostré lokální minimum. ▲

Příklad 9.15. Najděte lokální extrémy a maximální intervaly ryzí monotonie funkce

$$f: y = x - 2 \sin x, \quad x \in (0, 2\pi).$$



Řešení.

1. Definiční obor je zadán, tj. $D(f) = (0, 2\pi)$.
2. První derivace a její definiční obor:

$$f'(x) = 1 - 2 \cos x, \quad D(f') = D(f) = (0, 2\pi).$$

3. Určíme intervaly, na nichž je f' kladná, resp. záporná.

a) Najdeme nulové body f' , tj. řešíme rovnici $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}, \quad x \in (0, 2\pi) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{3}.$$

b) $D(f')$ rozdělíme nulovými body f' na disjunktní intervaly:

$$\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right), \quad \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right).$$

c) Vybereme z každého intervalu jeden bod a určíme znaménko f' . Výsledek je shrnut v následující tabulce.

Odlogaritmováním (využíváme skutečnost, že e^x je rostoucí funkce) dostaneme:

$$\frac{1}{x} < e^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{e} \Leftrightarrow x > e.$$

Tedy f' je kladná na intervalu (e, ∞) .

ii) Určíme intervaly, kde je $f'(x) < 0$:

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{x^2} \cdot \left(\ln \frac{1}{x} + 1 \right) < 0.$$

Obdobně jako v předchozím bodě, výraz $-\frac{1}{x^2}$ je záporný, takže výraz v závorce musí být kladný, aby byl výsledný součin záporný. Tedy

$$\ln \frac{1}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} > -1 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} > \ln e^{-1} \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{e} \Leftrightarrow x < e.$$

Vzhledem k tomu, že definičním oborem funkce f jsou pouze kladná reálná čísla, je f' záporná na intervalu $(0, e)$.

4. Intervaly monotonie a lokální extrémy.

Zjistili jsme, že funkce na intervalu $(0, e)$ klesá a na intervalu (e, ∞) roste, tedy díky spojitosti má v bodě $x_0 = e$ ostré lokální minimum. Znaménka derivace a monotonií na příslušných intervalech vyznačíme nad číselnou osu



nebo zapíšeme do tabulky:

	$(0, e)$	e	(e, ∞)
f'	-	0	+
f	↘	lok. min.	↗

5. Závěr: Funkce f je klesající na intervalu $(0, e)$ a rostoucí na (e, ∞) . V bodě e nastává ostré lokální minimum. ▲

Pokuste se vyřešit předchozí příklad i užitím Cauchyovy-Bolzanovy věty. Tím, že budete mít před sebou dva způsoby řešení jedné úlohy, uvidíte výhody i nevýhody obou možností a můžete se rozhodnout, který postup je pro vás přijatelnější, a budete jej dále využívat k řešení podobných úloh.

Na závěr si ukážeme jiný způsob, jak rozhodnout, zda má daná funkce ve stacionárním bodě lokální extrém. Jedná se opět o tzv. *postačující podmínku* existence lokálního extrému, podobně jak tomu bylo u věty 9.11. Geometrický význam následujícího tvrzení bude zřejmý z další části textu (oddíl 9.3).

V.12.4. **Věta 9.17.** Nechť $f'(x_0) = 0$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li:

- i) $f''(x_0) < 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální maximum.
- ii) $f''(x_0) > 0$, pak má funkce f v bodě x_0 ostré lokální minimum.

Výhodou postupu založeného na předchozí větě je, že nemusíme určovat intervaly monotonie funkce f . Nevýhodou je, že funkce f musí mít ve stacionárních bodech druhou derivaci.



Příklad 9.18. Najděte lokální extrémů funkce $f: y = 2x^3 - 3x^2 - 12x$.

Řešení. Jedná se o polynom, definiční obor funkce i všech derivací je tedy $\mathbb{R}$.

Určíme první derivaci: $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$.

Stacionární body:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$$

Vypočteme druhou derivaci: $f''(x) = 12x - 6$.

Dosadíme stacionární body: $f''(-1) = -18 < 0$, $f''(2) = 18 > 0$.

V bodě $x_1 = -1$ je tedy ostré lokální maximum, v bodě $x_2 = 2$ je ostré lokální minimum. ▲

Věta 9.17 neřeší případ, kdy je $f''(x_0) = 0$. Jak postupovat v takovém případě, se dozvíme z věty následující.

V.12.5

Věta 9.19. Nechť $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ a nechť $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ pro nějaké $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Je-li:

- i) n liché, pak funkce f nemá v bodě x_0 lokální extrém.
- ii) n sudé a $f^{(n)}(x_0) > 0$, pak funkce f má v bodě x_0 ostré lokální minimum.
- iii) n sudé a $f^{(n)}(x_0) < 0$, pak funkce f má v bodě x_0 ostré lokální maximum.



Příklad 9.20. Najděte lokální extrémů funkce f , je-li:

- a) $f: y = x^4$,
- b) $f: y = x^5$,
- c) $f: y = 12x^5 - 15x^4 - 40x^3 + 60$.

Řešení. Ve všech třech případech se jedná o polynomy, definiční obory všech tří funkcí i všech jejich derivací jsou rovny $\mathbb{R}$.

a) Určíme první derivaci: $f'(x) = 4x^3$.

Stacionární bod: $x_0 = 0$.

Vypočteme druhou derivaci a dosadíme bod x_0 : $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$.

Vypočteme třetí derivaci a dosadíme bod x_0 : $f'''(x) = 24x$, $f'''(0) = 0$.

Vypočteme čtvrtou derivaci a dosadíme bod x_0 : $f^{(4)}(x) = 24$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.

Dle předchozí věty má funkce f v bodě $x_0 = 0$ ostré lokální minimum.

b) Určíme první derivaci: $f'(x) = 5x^4$.

Stacionární bod: $x_0 = 0$.

Vypočteme druhou derivaci a dosadíme bod x_0 : $f''(x) = 20x^3$, $f''(0) = 0$.

Vypočteme třetí derivaci a dosadíme bod x_0 : $f'''(x) = 60x^2$, $f'''(0) = 0$.

Vypočteme čtvrtou derivaci a dosadíme bod x_0 : $f^{(4)}(x) = 120x$, $f^{(4)}(0) = 0$.

Vypočteme pátou derivaci: $f^{(5)}(x) = 120$, $f^{(5)}(0) \neq 0$.

Dle předchozí věty nemá funkce f v bodě $x_0 = 0$ lokální extrém.

c) Lokální extrémy zadané funkce jsme již vyšetřovali v příkladě 9.12 využitím věty 9.11. Nyní k výpočtu použijeme větu 9.19.

Určíme první derivaci: $f'(x) = 60x^4 - 60x^3 - 120x^2$.

Nalezneme stacionární body: $x_1 = -1, x_2 = 0$ a $x_3 = 2$.

Vypočteme druhou derivaci: $f''(x) = 240x^3 - 180x^2 - 240x$.

Dosadíme stacionární body:

$f''(-1) = -180 < 0$. Funkce f má v bodě $x_1 = -1$ ostré lokální maximum.

$f''(2) = 720 > 0$. Funkce f má v bodě $x_3 = 2$ ostré lokální minimum.

$f''(0) = 0$. Vypočteme třetí derivaci: $f'''(x) = 720x^2 - 360x - 240$

$f'''(0) = -240 \neq 0$. Funkce f nemá v $x_2 = 0$ lokální extrém.

Příklad 9.21. Najděte lokální extrémy funkce f dané předpisem

$$f(x) = x^3 e^{x^2}.$$



Řešení. Vypočteme první derivaci:

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^2} + x^3 e^{x^2} \cdot 2x = e^{x^2} x^2 (3 + 2x^2).$$

Stacionární bod je $x_0 = 0$.

Vypočteme druhou derivaci:

$$f''(x) = (e^{x^2} 2x \cdot x^2 + e^{x^2} \cdot 2x)(3 + 2x^2) + 4x^3 e^{x^2} = x e^{x^2} (4x^4 + 14x^2 + 6).$$

Dosadíme bod $x_0 = 0$: $f''(0) = 0$.

Vypočteme třetí derivaci:

$$\begin{aligned} f'''(x) &= (e^{x^2} + x e^{x^2} \cdot 2x)(4x^4 + 14x^2 + 6) + x e^{x^2} (16x^3 + 28x) = \\ &= e^{x^2} \left((1 + 2x^2)(4x^4 + 14x^2 + 6) + x(16x^3 + 28x) \right) = \\ &= e^{x^2} (8x^6 + 48x^4 + 54x^2 + 6). \end{aligned}$$

Dosadíme bod $x_0 = 0$: $f'''(0) = 6$. Protože je $f'''(0) \neq 0$, funkce f nemá v bodě 0 lokální extrém. Protože žádné jiné body podezřelé z lokálních extrémů nemáme, funkce nemá žádný lokální extrém.

Uvědomte si, že lokální extrémy funkce mohou nastat jednak ve stacionárních bodech, jednak v bodech, kde derivace neexistuje. Postupem, který jsme uvedli na straně 251, určíme všechny lokální extrémy. Postup založený na větě 9.19 slouží k ověření lokálních extrémů pouze ve stacionárních bodech. Neříká nic o bodech, v nichž derivace neexistuje. Je proto vhodný pouze u funkcí, které mají derivace na celém definičním oboru, a navíc pokud nedostaneme derivováním složitou funkci. Jak jsme viděli na předchozích příkladech, použití věty 9.19 bylo výhodné v případě polynomů, v případě funkce $f(x) = x^3 e^{x^2}$ by bylo vzhledem k složitějším derivacím rychlejší použití postupu uvedeného na straně 251. Zkuste si příklad spočítat oběma způsoby.

globální extrémy - viz str. 284

Definice 10.1. Necht' $M \subset D(f)$ a $x_0 \in M$.

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního maxima** v bodě x_0 , jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \leq f(x_0)$.

Řekneme, že funkce f nabývá na množině M **globálního minima** v bodě x_0 , jestliže pro všechna $x \in M$ platí $f(x) \geq f(x_0)$.

Nabývá-li funkce f na množině M globálního maxima nebo minima v bodě x_0 , říkáme, že funkce f nabývá na množině M **globálního extrému** v bodě x_0 .

Místo globální extrém se někdy používá název *absolutní extrém*.

Poznámka 10.2.

1. Předchozí definice říká, že funkce f nabývá na množině M globálního maxima v bodě x_0 , jestliže $f(x_0) = \max\{f(x), x \in M\}$, a funkce f nabývá na množině M globálního minima v bodě x_0 , jestliže $f(x_0) = \min\{f(x), x \in M\}$.
2. Globální maximum, resp. minimum, funkce f na M může, ale nemusí existovat. Uvedme si tři příklady:
 - i) Funkce $f(x) = x^3$ má na množině $M = \langle -1, 1 \rangle$ globální maximum v bodě $x = 1$ a globální minimum v bodě $x = -1$.
 - ii) Funkce $f(x) = x^2$ má na množině $M = \langle 0, 1 \rangle$ globální minimum v bodě $x = 0$. Globální maximum neexistuje, neboť neexistuje maximální prvek množiny funkčních hodnot této funkce na zadané množině.
 - iii) Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ má na množině $M = \langle 2, \infty \rangle$ globální maximum v bodě $x = 2$ a globální minimum neexistuje.
3. Funkce může na množině M nabývat globálního maxima, resp. minima, ve více bodech — funkční hodnota v těchto bodech musí být stejná. Např. funkce $f(x) = \sin x$ nabývá na množině $M = \langle 0, 4\pi \rangle$ globálního maxima v bodech $x = \frac{\pi}{2}$ a $x = \frac{5\pi}{2}$ a globálního minima v bodech $x = \frac{3\pi}{2}$ a $x = \frac{7\pi}{2}$.
4. Rozdíl mezi lokálním a globálním extrémem je podstatný. Zatímco u lokálního extrému musí příslušná nerovnost platit jen v nějakém okolí bodu x_0 , u globálního extrému musí být splněna na celé uvažované množině.

Při hledání globálních extrémů se nejprve omezíme na případ, kdy bude funkce f *spojitá* a množina M bude *uzavřený a ohraničený interval*. V takovém případě budeme mít existenci globálních extrémů zajištěnu.

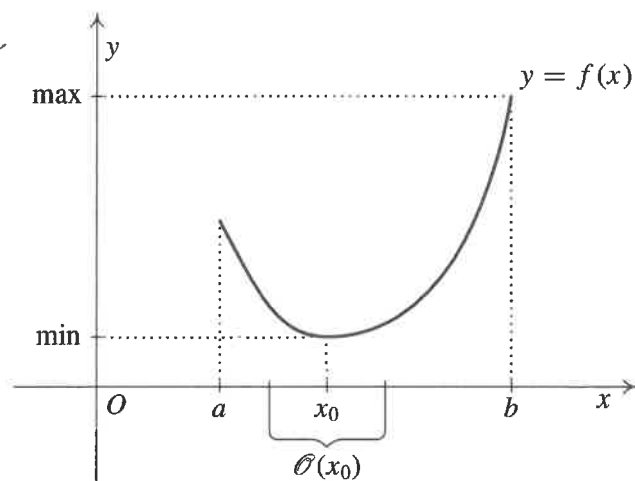
V. 42. G.

Věta 10.3 (Weierstrassova). Necht' je funkce f *spojitá na uzavřeném ohraničeném intervalu* $\langle a, b \rangle$, $a, b \in \mathbb{R}$. Pak funkce f nabývá na $\langle a, b \rangle$ **globálního maxima i globálního minima**.

Je-li tedy interval *uzavřený a ohraničený* a funkce f *spojitá*, pak globální extrémy určitě existují. Podívejme se, v jakých bodech mohou být. Je-li v bodě x_0 globální extrém a $x_0 \in (a, b)$, je v x_0 i lokální extrém (je-li totiž např. $f(x) \geq f(x_0)$ pro všechna $x \in (a, b)$, tím spíš tato nerovnost platí na nějakém okolí bodu x_0) — viz obr. 10.1. Tedy **globální extrém může nastat**

- i) buď v bodě lokálního extrému v intervalu (a, b) ,
- ii) nebo v krajním bodě $x = a$, resp. $x = b$.

Například na obr. 10.1 je nejmenší funkční hodnota (globální minimum) ve vnitřním bodě x_0 , kde je současně lokální minimum, avšak největší hodnota (globální maximum) je v krajním bodě b .



Obr. 10.1

Jsou-li splněny předpoklady Weierstrassovy věty, pak víme, že globální extrémy existují a jsou buď v bodech lokálních extrémů anebo v krajních bodech daného intervalu. Stačí tedy již pouze porovnat funkční hodnoty v „podezřelých bodech“.

Postup hledání globálních extrémů spojitě funkce f na uzavřeném a ohraničeném intervalu $\langle a, b \rangle$ lze tedy shrnout do těchto tří bodů:

1. V intervalu (a, b) najdeme body „podezřelé z lokálních extrémů“:
 - a) Body, v nichž je derivace nulová (stacionární body).
 - b) Body, v nichž derivace neexistuje.
2. Vypočteme funkční hodnoty ve všech bodech podezřelých z lokálních extrémů a v krajních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$.
3. Vybereme bod, ve kterém má funkce f největší, resp. nejmenší, funkční hodnotu. V tomto bodě nabývá funkce f globálního maxima, resp. globálního minima.

Poznámka 10.4. Máme-li díky tvrzení Weierstrassovy věty zaručenu existenci globálních extrémů, nemusíme ověřovat, zda v bodech „podezřelých“ z existence lokálního extrému tento extrém skutečně nastává. Jestliže vezmeme v úvahu nějaký stacionární bod, ve kterém funkce nemá lokální extrém, nic se neděje. Tento bod nemůže být ani bodem globálního extrému. Zjistí se to při porovnávání funkčních hodnot v jednotlivých podezřelých bodech. Pokud naopak globální extrém nastává ve více bodech, výše uvedeným způsobem je najdeme všechny.



Příklad 10.5. Najděte globální extrémy funkce $f: y = x^4 - 8x^2 + 4$ na množině $M = \langle 1, 3 \rangle$.

Řešení. Funkce f je spojitá, interval $\langle 1, 3 \rangle$ je uzavřený a ohraničený, tudíž dle Weierstrassovy věty existuje jak globální minimum, tak globální maximum. Lze tedy použít zmíněný postup.

1. V intervalu $(1, 3)$ najdeme body „podezřelé“ z lokálních extrémů. K tomu budeme potřebovat derivaci: $f'(x) = 4x^3 - 16x$.

a) Určíme stacionární body:

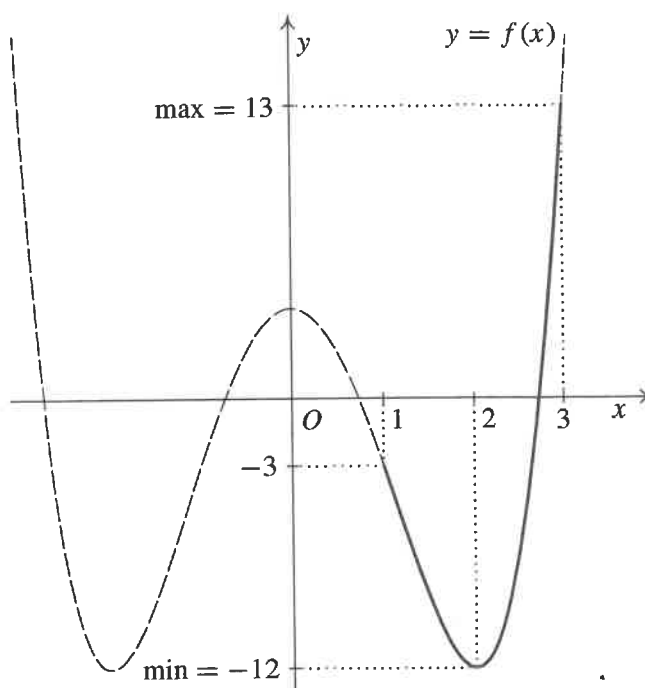
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 16x = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 4) = 0.$$

Jeden kořen je $x_1 = 0$. Další kořeny dostaneme z rovnice $x^2 - 4 = 0$, tedy $x_{2,3} = \pm 2$. Našli jsme tři stacionární body $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = -2$. V intervalu $(1, 3)$ leží pouze $x_0 = 2$.

b) Žádný další bod nepřipadá v úvahu, neboť derivace existuje v každém bodě množiny M .

2. Vypočteme funkční hodnoty v podezřelých bodech a v krajních bodech intervalu $\langle 1, 3 \rangle$.

$$f(2) = 2^4 - 8 \cdot 2^2 + 4 = -12, \quad f(1) = 1^4 - 8 \cdot 1^2 + 4 = -3, \quad f(3) = 3^4 - 8 \cdot 3^2 + 4 = 13.$$



Obr. 10.2

3. Vybereme největší a nejmenší z hodnot $f(2) = -12$, $f(1) = -3$, $f(3) = 13$. Dostáváme, že funkce f nabývá na množině M globálního minima v bodě $x_0 = 2$, $f(2) = -12$ a globálního maxima v bodě $b = 3$, $f(3) = 13$. Pro ilustraci uvádíme graf funkce f — viz obr. 10.2. ▲

Příklad 10.6. Najděte globální extrémy funkce f na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$:



$$f: y = 1 - \sqrt[5]{(x^2 + 2x)^4}.$$

Řešení. Funkce f je spojitá, interval $\langle -1, 2 \rangle$ je uzavřený a ohraničený, proto můžeme opět využít Weierstrassovu větu.

1. V intervalu $\langle -1, 2 \rangle$ najdeme body „podezřelé“ z lokálních extrémů. Předpis pro funkci f upravíme do tvaru $f(x) = 1 - (x^2 + 2x)^{4/5}$ a zderivujeme:

$$f'(x) = -\frac{4}{5} \cdot (x^2 + 2x)^{-1/5} \cdot (2x + 2) = -\frac{8}{5} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^2 + 2x}}.$$

a) Nalezneme stacionární body:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{8}{5} \cdot \frac{x + 1}{\sqrt[5]{x^2 + 2x}} = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1.$$

Stacionárním bodem funkce f je tedy bod $x_0 = -1$, ale $-1 \notin \langle -1, 2 \rangle$, tudíž jej nebudeme počítat mezi podezřelé body.

- b) Dále určíme body, v nichž derivace neexistuje, tj. body, v nichž je jmenovatel zlomku roven nule: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$. Bod $x_2 = -2 \notin \langle -1, 2 \rangle$, dále proto uvažujeme pouze bod $x_1 = 0$.
2. Určíme funkční hodnoty v podezřelých bodech a v krajních bodech intervalu $\langle -1, 2 \rangle$:

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4,3.$$

3. Porovnáme funkční hodnoty v podezřelých bodech: $f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4,3$, $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$. Funkce f tedy nabývá na intervalu $\langle -1, 2 \rangle$ globálního maxima v bodě $x_1 = 0$, $f(0) = 1$ a globálního minima v bodě $b = 2$, $f(2) = 1 - \sqrt[5]{8^4} \doteq -4,3$. ▲

V následujícím příkladě si ukážeme, jak se dá při hledání globálních extrémů postupovat v případě, že nejsou splněny předpoklady Weierstrassovy věty, tedy nemáme zaručenu existenci globálních extrémů. Musíme proto využít jiných vlastností, např. monotonie, abychom mohli rozhodnout, ve kterých bodech globální extrémy existují, případně proč daná funkce některý z globálních extrémů nemá.

Příklad 10.7. Zjistěte, zda existují globální extrémy funkcí f , g na zadaných množinách. Pokud existují, nalezněte je:



a) $f: y = \arctg x$, $M_1 = (-1, 1)$,

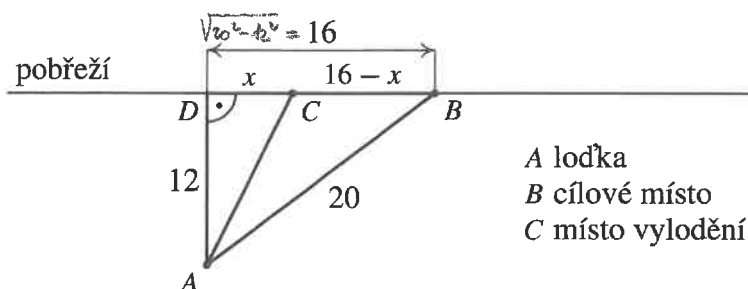
b) $g: y = -x + \operatorname{sgn} x$, $M_2 = \langle -1, 1 \rangle$.

V současné době hraje v praxi velice důležitou roli optimalizace. Hledáme „nejlepší“ nebo „nejhorší“ řešení nějakého problému. Naše úloha o globálním maximum nebo minimum je právě úlohou takového typu (ovšem velice speciální a jednoduchou) — viz následující příklady.

Příklad 10.8. Muž v loďce je vzdálen 12 km od pobřeží (majícího tvar přímky). Chce se co nejrychleji dostat do místa na pobřeží, které je od něj vzdáleno 20 km. Rozhodněte, kde se má vylodit, víte-li, že dokáže veslovat rychlostí 6 km/h a po břehu se pohybovat rychlostí 10 km/h.



Řešení. Načrtneme si danou situaci:



Cílem úlohy je zjistit, v kterém místě na pobřeží je vhodné se vylodit, chceme-li se co nejrychleji dostat z místa A na moři do cílového místa B na pobřeží. Celkový čas, který nám zabere přesun z bodu A do B , si označme t . Přitom čas veslování označme t_1 a čas pohybu po souši t_2 . Tedy

$$t = t_1 + t_2.$$

Čas t_1 spočteme jako podíl vzdálenosti bodů A , C a rychlosti veslování. Bod C nechť označuje místo vylodění. Pak

$$t_1 = \frac{|AC|}{v_1 \rightarrow 6}.$$

Obdobně čas t_2 je podíl vzdálenosti bodů C , B a rychlosti pohybu po souši. Tj.

$$t_2 = \frac{|CB|}{v_2 \rightarrow 10}.$$

Nyní je třeba vyjádřit velikosti $|AC|$ a $|CB|$. Nechť bod D označuje patu kolmice vedené z bodu A na pobřeží. Trojúhelník ADB je pravoúhlý, pomocí Pythagorovy věty vypočteme, že $|DB| = 16$. Označíme-li si velikost úsečky CD písmenem x , viz náčrtek, pak $|CB| = 16 - x$.

Konečně aplikací Pythagorovy věty na trojúhelník ACD dostaneme

$$|AC| = \sqrt{144 + x^2}.$$

Dosazením do vztahu pro čas máme

$$t(x) = t_1 + t_2 = \frac{|AC|}{6} + \frac{|CB|}{10} = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}.$$

Nalezli jsme funkci $t(x)$ proměnné x , jejíž globální minimum budeme nyní hledat. Přitom neznámá x může nabývat hodnot z intervalu $M = \langle 0, 16 \rangle$.

Matematická formulace úlohy: Najděte globální minimum funkce

$$t(x) = \frac{\sqrt{144 + x^2}}{6} + \frac{16 - x}{10}$$

na množině $M = \langle 0, 16 \rangle$.

Vidíme, že funkce t je spojitá, interval M je uzavřený a ohraničený, podle Weierstrassovy věty tedy globální minimum bude existovat.

1. V intervalu $(0, 16)$ najdeme body „podezřelé“ z lokálního extrému. K tomu potřebujeme derivaci funkce t :

$$t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10}.$$

- a) Určíme body, v nichž je derivace nulová:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{144 + x^2}} - \frac{1}{10} = 0.$$

Vyřešením této rovnice dostaneme jediný stacionární bod $x = 9$.

- b) Žádné další podezřelé body nemáme, protože derivace existuje na celém intervalu.
2. Vyšetříme funkční hodnoty v krajních bodech intervalu a v bodech „podezřelých“ z extrému, které se nacházejí uvnitř intervalu.

$$t(0) = \frac{108}{30}, \quad t(9) = \frac{96}{30}, \quad t(16) = \frac{100}{30}.$$

3. Funkce t nabývá na množině M globálního minima v bodě $x = 9$.

Muž se dostane nejrychleji z místa A do místa B , pokud se vylodí ve vzdálenosti 9 km od místa D , tj. 7 km od cílového místa B . ▲



Příklad 10.9. Určete rozměry otevřeného zahradního bazénu se čtvercovým dnem daného objemu 32 m^3 tak, aby se na vyzdění jeho dna a stěn spotřebovalo co nejméně materiálu.

Řešení. Bazén má tvar kvádrů. Označme písmenem a , $a > 0$, délku strany podstavy, písmenem v , $v > 0$, výšku tohoto kvádrů. Objem V , $V > 0$, kvádrů se čtvercovou podstavou a a výškou v se vypočte podle následujícího vzorce:

$$V = a^2 \cdot v \Rightarrow v = \frac{V}{a^2}.$$

Označme obsah podstavy S_1 a obsah jedné stěny S_2 . Pak pro obsah podstavy platí $S_1 = a^2$ a pro obsah jedné stěny platí $S_2 = a \cdot v = a \cdot \frac{V}{a^2} = \frac{V}{a}$.

Vyzdít se mají čtyři stěny a dno, tedy celková plocha k vyzdění se rovná

$$S = S_1 + 4 \cdot S_2 = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a}.$$

Matematická formulace úlohy: Najděte globální minimum funkce S :

$$S(a) = a^2 + 4 \cdot \frac{V}{a}$$

na intervalu $(0, \infty)$ (proměnná a se uvažuje pouze v tomto intervalu vzhledem k slovnímu zadání úlohy — je to délka strany). Zde nemůžeme využít Weierstrassovu větu, protože daný interval není uzavřený ani ohraničený. Tedy v této chvíli nevíme, zda funkce S vůbec nějaké globální minimum bude mít. Budeme vyšetřovat monotonii funkce S na intervalu $(0, \infty)$.

1. Vypočteme derivaci funkce S :

$$S'(a) = 2a - \frac{4V}{a^2}.$$

2. Určíme intervaly, na nichž je S' kladná, resp. záporná.

a) Určíme nulové body derivace:

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow 2a - \frac{4V}{a^2} = 0 \Leftrightarrow 2a^3 = 4V \Leftrightarrow a_0 = \sqrt[3]{2V}.$$

Po dosazení hodnoty $V = 32 \text{ m}^3$, dostáváme $a_0 = 4 \text{ m}$.

b) Rozdělíme interval $(0, \infty)$ bodem $a_0 = 4$ na dva disjunktní intervaly $(0, 4)$, $(4, \infty)$.

c) Určíme znaménko S' na těchto intervalech: Na intervalu $(0, 4)$ je S' záporná a na intervalu $(4, \infty)$ je S' kladná.

3. Monotonie: Funkce S je na $(0, 4)$ klesající a na $(4, \infty)$ rostoucí. S má tedy v bodě a_0 ostré lokální minimum.

Vzhledem k vyšetřené monotonii vidíme, že bod lokálního minima musí být zároveň bodem globálního minima funkce S na intervalu $(0, \infty)$ (v žádném jiném bodě nemůže být funkční hodnota nižší).

Závěr: Bazén bude splňovat zadané podmínky, bude-li mít rozměry $a = 4 \text{ m}$, $v = 2 \text{ m}$ ▲

Nyní přistupme k řešení tří příkladů, jejichž zadání jsme si uvedli v úvodní kapitole na straně 3.

Příklad 10.10. Z břevna kruhového průřezu s poloměrem $r = 20 \text{ cm}$ máme vytesat trám, který bude mít průřez ve tvaru obdélníku se stranami z a v („základnou“ a „výškou“). Jak máme volit z a v , aby trám měl maximální nosnost, víme-li, že jeho nosnost je úměrná první mocnině z a druhé mocnině v ?



Řešení. Znázorníme-li si schématicky do obrázku průřez břevna jako kruh a průřez hledaného trámu jako obdélník vepsaný do daného kruhu — viz obr. 10.4, můžeme zadání úlohy zformulovat takto:

Jaké rozměry má mít obdélník vepsaný do kruhu s poloměrem 20 cm , má-li být součin základny z a druhé mocniny výšky v maximální?